Kapitel 8. Projektive Algebraische Geometrie

8.1 Projektive Räume und Varietäten

Sei K stets ein Körper und $n \in \mathbb{N}$.

Motivation: Zwei verschiedene Geraden in $\mathbb{R}^2$ haben entweder genau einen Schnittpunkt oder sie sind parallel.
Grundidee projektiver Räume: Ergänze $\mathbb{R}^2$ durch "Punkte im Unendlichen," so dass sich 2 verschiedene Geraden stets in genau einem Punkt schneiden.
(Genauer: Lese im Buch Kapitel 8.1). Verallgemeinert:

Definition 0.1.

(1) Wir definieren eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf $K^{n+1}\backslash\{0\}$ durch

$$(x_0, \ldots, x_n) \sim (y_0, \ldots, y_n) :\Leftrightarrow \exists\, \lambda \in K^* : (x_0, \ldots, x_n) = \lambda(y_0, \ldots, y_n).$$

(2) Der n**-dimensionale projektive Raum** $\mathbb{P}^n(K)$ ist definiert durch

$$\mathbb{P}^n(K) := (K^{n+1}\backslash\{0\})/\sim .$$

(3) Die Äquivalenzklasse eines (n+1)-Tupels $(x_0, \ldots, x_n) \in K^{n+1}\backslash\{0\}$ notieren wir mit $(x_0 : \ldots : x_n)$ und wir nennen $(x_0 : \ldots : x_n)$ die **homogenen Koordinaten** von $(x_0, \ldots, x_n)$.

Unmittelbar nach Definition gilt die folgende geometrische Beschreibung:

$$\mathbb{P}^n(K) \cong \{\text{Ursprungsgeraden in } K^{n+1}\}.$$

Beispiel: In $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ sind die Punkte $(0 : \sqrt{2} : 0 : i)$ und $(0 : 2i : 0 : -\sqrt{2})$ identisch, da $(0, 2i, 0, -\sqrt{2}) = \sqrt{2}i(0, \sqrt{2}, 0, i)$.

Proposition 0.2. *Sei* $U_0 := \{(x_0 : \ldots : x_n) \in \mathbb{P}^n(K) : x_0 \neq 0\}$. *Die Abbildung*

$$\phi : K^n \to U_0,\ (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (1 : x_1 : \ldots : x_n)$$

ist eine Bijektion. Insbesondere bettet ϕ K^n *in* $\mathbb{P}^n(K)$ *ein.*

Proof. Offensichtlich ist die Abbildung ϕ wohldefiniert. Die Bijektivität weisen wir durch Angabe der Umkehrabbildung nach. Bemerke, dass $x_0 \neq 0$ für alle $(x_0 : \ldots : x_n) \in U_0$. Betrachte

$$\psi : U_0 \to K^n, (x_0 : \ldots : x_n) \mapsto (x_1/x_0, \ldots, x_n/x_0) \in K^n.$$

Zu zeigen:

(1) ψ ist wohldefiniert.
(2) $\psi = \phi^{-1}$.

Beweis:

(1) Seien $p, p' \in U_0$ mit $p = p'$, etwa $p = (x_0, \ldots, x_n)$ und $p' = (y_0, \ldots, y_n)$. Dann existiert ein $\lambda \in K^*$ mit $y_i = \lambda x_i$ für alle i. Es folgt

$$\psi(p') = (y_1/y_0, \ldots, y_n/y_0) = \left(\frac{\lambda x_1}{\lambda x_0}, \ldots, \frac{\lambda x_n}{\lambda x_0}\right) = \psi(p).$$

(2) Es gilt

$$\phi(\psi(x_0, \ldots, x_n)) = \phi(x_1/x_0, \ldots, x_n/x_0) = (1 : x_1/x_0 : \ldots : x_n/x_0) = (x_0 : \ldots : x_n)$$

und

$$\psi(\phi(x_1, \ldots, x_n)) = \psi(1 : x_1 : \ldots x_n) = (x_1, \ldots, x_n).$$

□

Aus der Proposition und der Definition von U_0 folgt sofort $\mathbb{P}^n(K) = U_0 \sqcup H$, wobei

$$H = \{p \in \mathbb{P}^n(K) : p = (0 : x_1 : \ldots : x_n)\}.$$

Identifizieren wir U_0 mit K^n (Proposition) und H mit $\mathbb{P}^{n-1}(K)$ (klar), so folgt $\mathbb{P}^n(K) = K^n \sqcup \mathbb{P}^{n-1}(K)$.
Insbesondere für $n = 1 : \mathbb{P}^1(K) = K \cup \mathbb{P}^0(K) = K \cup \{\infty\}$.

Korollar 0.3. *Für jedes $i = 0, \ldots, n$ sei $U_i = \{(x_0 : \ldots : x_n) \in \mathbb{P}^n(K) : x_i \neq 0\}$. Dann gilt:*

(1) Es gibt eine Bijektion zwischen U_i und K^n.
(2) $\mathbb{P}^n(K) \backslash U_i$ kann mit $\mathbb{P}^{n-1}(K)$ identifiziert werden.
(3) Es gilt $\mathbb{P}^n(K) = \bigcup_{i=0}^n U_i$.

Proof. (1) und (2) wie oben mit i anstelle von 0.
Für (3) beachte, dass aus $(x_0 : \ldots : x_n) \notin U_i$ für alle i folgt, dass $x_i = 0$ für alle i, im Widerspruch zur Definition von $\mathbb{P}^n(K)$. □

Nächstes Ziel: Begriff der projektiven Varietät einführen.
Problem: Sei $f(X_0, X_1, X_2) = X_1 - X_2^2 \in \mathbb{R}[X_0, X_1, X_2]$ und $V = \mathcal{V}(f)$. Dann gilt

$$f(1, 4, 2) = 0, \text{ aber } f(2, 8, 4) = -8 \neq 0,$$

obwohl die beiden Punkte über $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ übereinstimmen, d.h. $\mathcal{V}(f)$ ist nicht wohldefiniert.
Lösung: Beschränken uns auf homogene Polynome.

Wiederholung: Ein Polynom $f \in K[X_0, \ldots, X_n]$ heißt **homogen**, falls ein $d \in \mathbb{N}$ existiert, so dass alle Monome von f Totalgrad d haben.

Proposition 0.4. *Sei $f \in K[X_0, \ldots, X_n]$ ein homogenes Polynom, $(x_0, \ldots, x_n) \in K^{n+1} \backslash \{0\}$ und $\lambda \in K^*$. Gilt $f(x_0, \ldots, x_n) = 0$, so auch $f(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) = 0$. Insbesondere ist*

$$\mathcal{V}(f) = \{p \in \mathbb{P}^n(K) : f(p) = 0\}$$

eine wohldefinierte Teilmenge von $\mathbb{P}^n(K)$.

Proof. Sei f von Totalgrad d und $g(X_0, \ldots, X_n) = X_0^{d_0} \cdots X_n^{d_n}$ ein Monom von f (d.h. $d_0 + \ldots + d_n = d$). Dann gilt

$$g(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^{d_0} x_0 \cdot \ldots \cdot \lambda^{d_n} x_n = \lambda^d x_0^{d_0} \cdots x_n^{d_n}.$$

Somit $f(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^d f(x_0, \ldots, x_n) = 0$. □

Definition 0.5. Sei K ein Körper und $f_1, \ldots, f_s \in K[X_0, \ldots, X_n]$ homogene Polynome. Dann heißt

$$\mathcal{V}(f_1, \ldots, f_s) := \{(a_0 : \ldots : a_n) \in \mathbb{P}^n(K) : f_i(a_0, \ldots, a_n) = 0 \text{ für alle } i\}$$

die durch $f_1, \ldots, f_s$ definierte **projektive Varietät.**

Bemerkung: Es gibt nichthomogene Polynome, deren Nullstellenmenge eine wohldefinierte projektive Varietät definieren, vgl. Buch Seite 404, Aufgabe 7.

Zusammenhang zwischen affinen und projektiven Varietäten:

Proposition 0.6. *Sei $V = \mathcal{V}(f_1, \ldots, f_s) \subseteq \mathbb{P}^n(K)$ eine projektive Varietät. Dann kann $W = V \cap U_0$ mit der affinen Varietät $\mathcal{V}(g_1, \ldots, g_s)$ identifiziert werden, wobei*

$$g_i(X_1, \ldots, X_n) = f_i(1, X_1, \ldots, X_n)$$

für alle $1 \leq i \leq s$.

Proof. Seien ϕ und ψ wie in (bzw. im Beweis von) Proposition 2.
Sei $p \in W$. Wegen $p \in U_0$ können wir $p = (1 : a_1 : \ldots : a_n)$ schreiben, und da $p \in V$ gilt

$$g_i(a_1, \ldots, a_n) = f_i(1, a_1, \ldots, a_n) = 0,$$

also $\psi(W) \subseteq \mathcal{V}(g_1, \ldots, g_s)$.
Ist umgekehrt $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{V}(g_1, \ldots, g_s)$, so ist $(1 : a_1 : \ldots : a_n) \in U_0$ und es gilt

$$f_i(1, a_1, \ldots, a_n) = g_i(a_1, \ldots, a_n) = 0.$$

Also gilt $\phi(\mathcal{V}(g_1, \ldots, g_s)) \subseteq W$. Da ϕ und ψ zueinander inverse Bijektionen sind folgt die Behauptung. $\square$

Beispiel:

(1) Betrachte $V = \mathcal{V}(X_1^2 - X_2X_0, X_1^3 - X_3X_0) \subseteq \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$. Gemäß vorheriger Proposition setzen wir $X_0 = 1$, d.h. wir erhalten als entsprechende affine Varietät $V = \mathcal{V}(X_1^2 - X_2, X_1^3 - X_3) \subseteq \mathbb{R}^3$.
Können statt X_0 auch eine andere Variable eliminieren (insbesondere gilt vorherige Proposition auch für alle Komponenten); etwa in dem wir $g_i(X_0, X_2, X_3) = f_i(X_0, 1, X_2, X3)$ setzen. Oben eingesetzt liefert dies die affine Varietät $\mathcal{V}(1 - X_2X_0, 1 - X_3X_0^2)$.

(2) Umkehrung: Betrachte $W = \mathcal{V}(X_2 - X_1^3 + X_1^2) \subseteq \mathbb{R}^2$. Finde die zugehörige projektive Varietät in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.
Problem: f ist nicht homogen.
Lösung: Die Homogenisierung von f,

$$f^h(X_0, \ldots X_3) = X_0^3 f(X_1/X_0, X_2/X_0) = X_2X_0^2 - X_1^3 + X_0X_1^2,$$

liefert eine projektive Varietät in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

Das letzte Beispiel beruht auf folgendem Resultat:

Proposition 0.7. *Sei $g(X_1, \ldots, X_n) \in K[X_1, \ldots, X_n]$ ein Polynom von Totalgrad d.*

(1) Sei $g = \sum_{i=0}^{d} g_i$ die Zerlegung von g in homogene Komponenten. Dann ist

$$\begin{aligned} g^h(X_0, \ldots, X_n) &= \sum_{i=0}^{d} g_i(X_1, \ldots, X_n) X_0^{d-i} \\ &= g_d(X_1, \ldots, X_n) + g_{d-1}(X_1, \ldots, X_n)X_0 + \ldots + g_0(X_1, \ldots, X_n)X_0^d \end{aligned}$$

ein homogenes Polynom von Totalgrad d in $K[X_0, \ldots, X_n]$, die sogenannte ***Homogenisierung*** *von g.*

(2) Die Homogenisierung von g ist durch die Formel

$$g^h = X_0^d g(X_1/X_0, \ldots, X_n/X_0)$$

gegeben.

*(3) Es gilt $g^h(1, X_1, \ldots, X_n) = g(X_1, \ldots, X_n)$ (**Dehomogenisierung**).*

(4) Sei $F(X_0, \ldots, X_n)$ ein homogenes Polynom, X_0^e die größte Potenz von X_0, die F teilt, und $f = F(1, X_1, \ldots, X_n)$ die Dehomogenisierung von F. Dann gilt $F = X_0^e f^h$.

Proof. (1) ist trivial.
(2) Sei zunächst g von der Form $aX_0^{l_1} \cdots X_n^{l_n}$ für ein $a \in K$ und sei $\deg g = l \in \mathbb{N}$ (d.h. $l_1 + \ldots + l_n = l$). Dann ist

$$\begin{aligned} X_0^d g(X_1/X_0, \ldots, X_n/X_0) &= X_0^d a(X_1/X_0)^{l_1} \cdots (X_n/X_0)^{l_n} \\ &= X_0^{d-l} g(X_1, \ldots, X_n) \end{aligned}$$

von der gewünschten Form. Der Fall $g \in K[X_1, \ldots, X_n]$beliebig folgt analog.
(3) folgt sofort aus (2).
Für (4) beachte, dass nach Voraussetzung

$$\deg(f) = \deg(F(1, X_1, \ldots, X_n)) = \deg(F) - e = d - e,$$

und damit nach (2)

$$f^h = X_0^{d-e} f(X_1/X_0, \ldots, X_n/X_0).$$

Es folgt mittels (2), der Homogenität von F und (3), dass

$$X_0^e f^h = X_0^d f(X_1/X_0, \ldots, X_n/X_0) = X_0^d F(1, X_1/X_0, \ldots, X_n/X_0) = F^h = F.$$

$\square$

Ist $W = \mathcal{V}(g_1, \ldots, g_s) \subseteq K^n$ eine affine Varietät, so erhalten wir durch Homogenisierung also eine projektive Varietät $V = \mathcal{V}(g_1^h, \ldots, g_s^h) \subseteq \mathbb{P}^n(K)$. Aus Proposition 6 folgt $V \cap U_0 = W$.